Niveau : Deuxième Bac sciences PC /SVT /STE

CENTRE EL MOUMEN

Résumé

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Plan de chapitre 11 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen   06 66 73 83 49   Prof El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen   06 66 73 83 49   https://www.elmoumen.academy

CENTRE EL MOUMEN — Résumé : GEOMETRIE DANS L'ESPACE — PROF : EL MOUMEN — 2 Bac

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace

Condition de colinéarité de deux vecteurs

Soient $\vec{U}(x;y;z)$ et $\vec{V}(x';y';z')$ deux vecteurs

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si ; $\exists \alpha \in IR$: $\vec{U}=\alpha\vec{V}$

- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_y=\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \quad et \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Vecteurs coplanaires

$\vec{U}(x;y;z)$; $\vec{V}(x';y';z')$ et $\vec{W}(x'';y'';z'')$ Les vecteurs $\vec{U}$; $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont coplanaires ssi $\exists(\alpha;\beta)\in IR^2$: $\vec{W}=\alpha\vec{U}+\beta\vec{V}$

- Les vecteurs $\vec{U}$; $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont coplanaires ssi $det(\vec{U};\vec{V};\vec{W})=0$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Norme d'un vecteur et distance entre deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$

- Soit $\vec{U}(x;y;z)$ un vecteur dans l'espace:

$$\|\vec{U}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A;z_B-z_A)$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

- Coordonnées de I le milieu de $[AB]$ est ; $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Formule trigonométrique du produit scalaire

Soients $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls dans l'espace donc : $\vec{U}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}=\overrightarrow{AC}$

Le produit scalaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans l'espace est le nombre réel noté $\vec{U}.\vec{V}$ et définit par :

- $\vec{U}.\vec{V}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$
- $\vec{U}.\vec{V}=\|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|\times cos(\overline{\vec{U};\vec{V}})$

Formule analytique de produit scalaire

Soients $\vec{U}(x;y;z)$ et $\vec{V}(x';y';z')$ on a :

- $\vec{U}.\vec{V}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$
- $\vec{U}\perp\vec{V}\Leftrightarrow\vec{U}.\vec{V}=0$

DROITE DANS L'ESPACE

Soit (D) la droite qui passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(a;b;c)$

Une représentation paramétrique de (D)

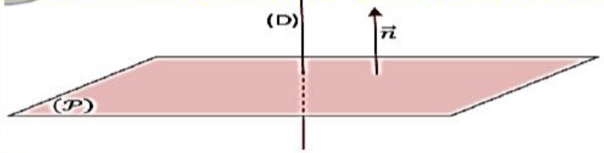
$$(D):\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases} \; ; \; (t\in IR)$$

Position relative de deux droites

(D) une droite de vecteur directeur $\vec{U}$ et (D') une droite de vecteur directeur $\vec{V}$

- $(D)//(D')$ ssi $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaire
- $(D)\perp(D')$ ssi $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux

Plan dans l'espace - Vecteur normale

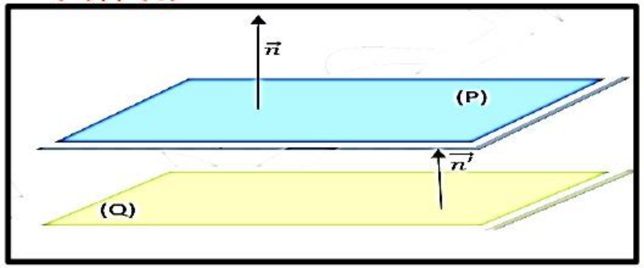


- Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normale au plan (P)
- Tout plan à une équation cartésienne de la forme : $(P): ax+by+cz+d=0$
- Le Vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan $(P): ax+by+cz+d=0$
- A un point et $\vec{n}$ un vecteur de l'espace L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est un plan (P) passant par A et de vecteur normale $\vec{n}$

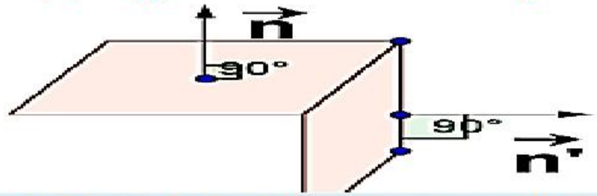
Position relative de deux plans

Soients (P) Un plan de vecteur normale $\vec{n}$ et (Q) un plan de vecteur normale $\vec{n'}$

- $(P)//(Q)$ ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaire



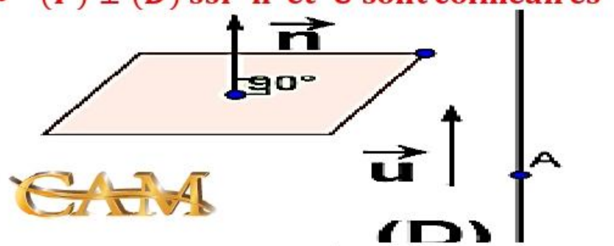
- $(P)\perp(Q)$ ssi $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux



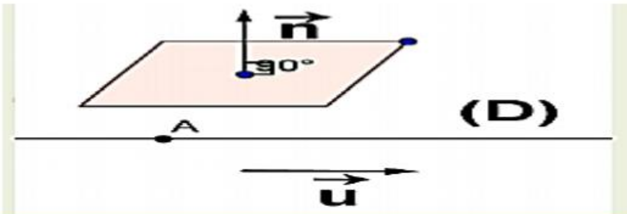
Position relative d'un plan et une droite

(D) une droite de vecteur directeur $\vec{U}$ et (P) Un plan de vecteur normale $\vec{n}$

- $(P)\perp(D)$ ssi $\vec{n}$ et $\vec{U}$ sont colinéaires

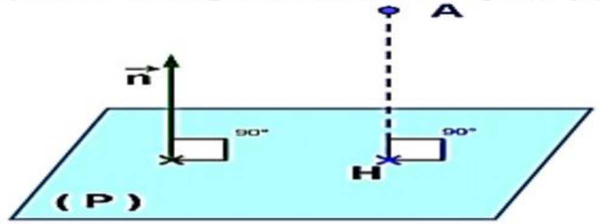


- $(P)//$ (D) ssi $\vec{n}$ et $\vec{U}$ sont orthogonaux



DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

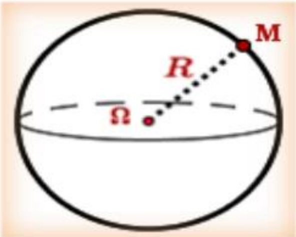
Soient $(P) : ax + by + cz + d = 0$ un plan et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et H la projection orthogonale de A sur le plan (P)

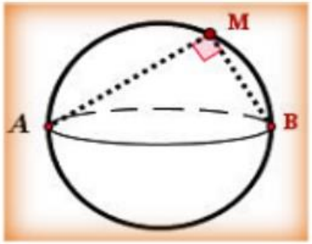


La distance de point A au plan (P) est :

$$d(A;(P)) = AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Sphère dans l'espace





Soit (S) la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon r l'équation cartésienne de (S) est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

- L'équation cartésienne de la sphère (S) définit par son diamètre $[AB]$ est donné par

$$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$

Proposition : l'ensemble des points M

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que :

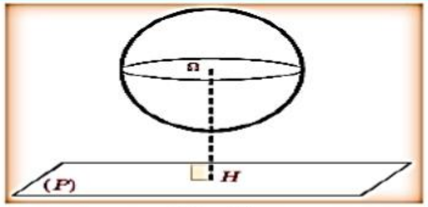
$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

est un sphère si $D = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

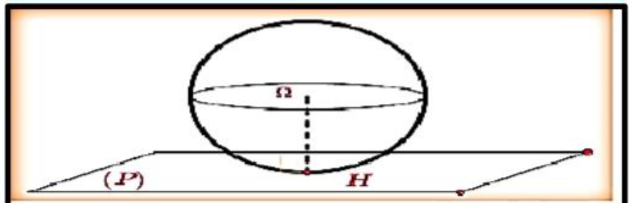
- Son centre est le point $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$
- Son rayon est $r = \frac{\sqrt{D}}{2}$

Position relative d'une sphère et un plan

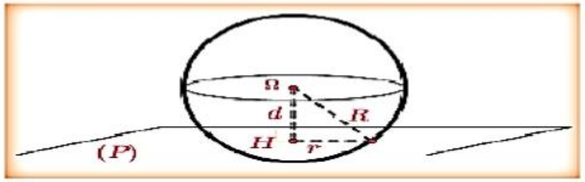
Soit (S) une sphère de centre Ω et de rayon R (P) un plan et d la distance entre le centre Ω est le plan (P) : $d = d(\Omega; (P))$



d > R
Dans ce cas le plan ne coupe pas la sphère



d = R
Dans ce cas le plan est tangent à la sphère en un point H



d < R
Dans ce cas le plan coupe la sphère

Suivant un cercle (C) de centre H et de rayon r tel que : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

- Pour déterminer les cordonnées de H on résoudre le système suivants :

$$\begin{cases} (\Omega H) : \begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} ; \ (t \in IR) \\ (P) : ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Position relative d'une sphère et une droite

Soit (S) une sphère de centre Ω et d rayon R et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{U}(\alpha; \beta; \gamma)$

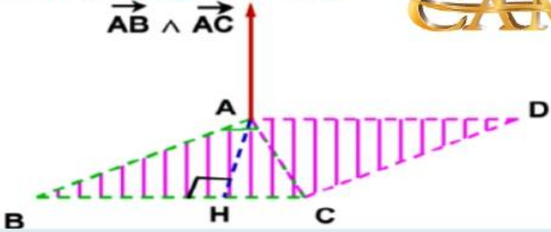
Pour déterminer les cordonnées des points d'intersections de sphère (S) et la droite (Δ) on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (\Delta) : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} ; \ (t \in IR) \\ (S) : (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2 \end{cases}$$

Expression analytique du produit vectoriel

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires ssi $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$
- A ; B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)



Distance d'un point Ω à une droite (D)

(D) la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{U}$ et Ω un point de l'espace

Alors $d(\Omega; (D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{U}\|}{\|\vec{U}\|}$

Aire d'un triangle ABC

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$